MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI

Niculae Ghiciu

MATEMATICĂ M5

pentru clasa a XII-a

ART
Grup Editorial

CUPRINS

I ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

I ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1. MATRICE

1.1. Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice

Citirea uşoară a unor informaţii numerice a condus la înregistrarea acestora în tabele. Unele dintre aceste tabele, numite matrice, sunt folosite la studiul compatibilității şi la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare.

Pentru a susține această afirmație, începem prin prezentarea unor probleme ale căror informații numerice se prezintă prin tabele matriceale respectiv, prin matrice.

1) La trei librării L_1, L_2 şi L_3, un manual şcolar M se vinde respectiv, cu prețurile 12 u.m., 12,50 u.m. şi 13 u.m. (u.m. = unități monetare), un caiet studențesc S se vinde respectiv, cu prețurile 8 u.m., 7 u.m. şi 8,50 u.m., iar un creion C se vinde respectiv, cu prețurile 6 u.m., 5,50 u.m. şi 5 u.m.

Pentru a avea o imagine mai clară asupra prețurilor celor trei obiecte de la cele trei librării, un elev le aşează într-un tabel cu trei linii şi trei coloane de tipul:

Librăria / Obiectul	L_1	L_2	L_3
M	12	12,50	13
S	8	7	8,50
C	6	5,50	5

sau într-un tabel de trei linii şi trei coloane de tipul:

$$\begin{array}{c} \\ M \\ S \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 12{,}50 & 13 \\ 8 & 7 & 8{,}50 \\ 6 & 5{,}50 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

numit **tabel de tip matriceal** cu 3 linii şi 3 coloane sau simplu, **matrice**.

2) La o intreprindere se realizează două produse P_1 şi P_2 prin folosirea a trei repere R_1, R_2, R_3 astfel:
- pentru produsul P_1 se folosesc 3 repere R_1, 1 reper R_2 şi 4 repere R_3;
- pentru produsul P_2 se folosesc 2 repere R_1, 3 repere R_2 şi 1 reper R_3.

Prețurile de fabricație (p.f.) ale reperelor R_1, R_2 şi R_3 sunt respectiv de 10 u.m., 8 u.m. şi 6 u.m., iar costurile de transport (c.t.) sunt respectiv, de 4 u.m., 5 u.m. şi 3 u.m.

Pentru o imagine de ansamblu asupra necesarului celor trei repere şi respectiv, asupra costurilor acestora, la nivelul intreprinderii se formează tabele de tip matriceal cu trei linii şi două coloane sau cu două linii şi trei coloane.

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ sau } \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \text{ respectiv } \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} p.f. & c.t. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \text{ sau } \begin{array}{c} \\ p.f. \\ c.t. \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

3) La o intreprindere se realizează produsele P_1, P_2 şi P_3 prin folosirea reperelor R_1, R_2, R_3 şi R_4 astfel:
- pentru produsul P_1 se folosesc a_{11} repere R_1, a_{12} repere R_2, a_{13} repere R_3 şi a_{14} repere R_4;
- pentru produsul P_2 se folosesc a_{21} repere R_1, a_{22} repere R_2 a_{23} repere R_3 şi a_{24} repere R_4;
- pentru produsul P_3 se folosesc a_{31} repere R_1, a_{32} repere R_2, a_{33} repere R_3 şi a_{34} repere R_4;

Un tabel de tip matriceal al consumului de repere pentru produsele intreprinderii este tabelul matriceal cu 3 linii şi 4 coloane:

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,3} \\ j=\overline{1,4}}}$$

, unde numărul a_{ij} reprezintă consumul de repere R_j pentru produsul P_i, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$.

Remarcă

Prin realizarea tabelului de tip matriceal A, cu 3 linii şi 4 coloane, s-a dat o funcţie $A:\{1,2,3\}\times\{1,2,3,4\}\to\mathbb{R}$, $(i,j)\to a_{ij}$, $i=\overline{1,3}$, $j=1,4$.

În general, fiind date două mulţimi $M=\{1,2,...,m\}$ şi $N=\{1,2,...,n\}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$, prin realizarea unui tabel de tip matriceal cu m linii şi n coloane, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, unde $a_{ij}\in\mathbb{C}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, se dă o funcţie $A=\{1,2,...,m\}\times\{1,2,...,n\}\to\mathbb{C}$, $(i,j)\to a_{ij}$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Definiţia matricei de tipul (m, n)

Fie $M=\{1,2,...,m\}$, $N=\{1,2,...,n\}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$ şi mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$. Numim matrice de tipul (m, n) cu elemente din mulţimea $\mathbb{C}$, orice funcţie $A:M\times N\to\mathbb{C}$, $(i,j)\to a_{ij}$, $i\in M$, $j\in N$.

Notăm matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *sau* $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Numerele $\boldsymbol{a_{ij}}$, $i\in M$, $j\in N$ *se numesc* ***elementele*** *matricei A.*

Mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane, cu elemente din $\mathbb{C}$, formează mulţimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente din $\mathbb{C}$ şi se notează $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Pe baza celor spuse mai sus, scriem că matricea $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Observaţii:

1) De obicei, matricele se notează cu litere mari ale alfabetului latin, cu sau fără indici: A, B, C, ..., L, ... X,..., A_1, A_2, ..., iar elementele matricelor se notează cu litere mici ale alfabetului latin, cu sau fără indici: a, b, c, ..., x, ..., a_{11}, a_{12}, ...

2) Cum $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, elementele matricelor pot fi considerate din oricare din aceste mulţimi. Deci, putem avea matrice din mulţimile de matrice: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sau $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $m,n\in\mathbb{N}^*$.

Cazuri particulare de matrice

1) O matrice $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$, cu n linii şi n coloane, se numeşte **matrice pătratică de ordinul *n***, cu elemente în $\mathbb{C}$. Scriem, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) O matrice $C=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}=\left(a_{i1}\right)_{i=\overline{1,m}}$, $a_{i1}\in\mathbb{C}$, cu m linii şi o coloană, se numeşte **matrice coloană**, cu elemente din $\mathbb{C}$. Spunem că matricea C este de tip $(m,\ 1)$ şi scriem $C\in\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$.

3) O matrice $L=\left(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}\right)=\left(L_{1j}\right)_{j=\overline{1,n}}$, $a_{1j}\in\mathbb{C}$, cu o linie şi n coloane, se numeşte **matrice linie**, cu elemente din $\mathbb{C}$. Spunem că matricea L este de tip $(1,\ n)$ şi scriem $L\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.

4) O matrice formată dintr-un singur element a, număr complex, are forma (a), $a\in\mathbb{C}$.

Exemple

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{Z}),\ B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z})$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z}),\ D=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & -\frac{2}{3} \\ -2 & 0,5 & 3 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Q}),\ L=\left(2,\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Q}).$$

5) Matricea $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se numeşte **matricea nulă** de tipul (m,n).

6) Matricea $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **matricea unitate** de ordinul n.

Diagonalele unei matrice pătratice

Fie $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sistemul ordonat de elemente $\left(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}\right)$ se numeşte **diagonala principală a matricei *A***, iar sistemul ordonat de elemente $a_{1n},a_{2n-1},\dots,a_{n1}$ se numeşte **diagonala secundară a matricei *A***.

Exemplu

Matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ are diagonala principală (1, 1, 1) şi diagonala secundară (2, 1, 2).

Transpusa unei matrice

Fie o matrice de tipul (m, n), $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\j=\overline{1,n}}}$.

Matricea de tipul (n, m), $A'=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\dots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\dots&a_{m2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{1n}&a_{2n}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}=\left(a_{ji}\right)_{\substack{j=\overline{1,n}\\i=\overline{1,m}}}$ se numeşte **transpusa matricei A.**

Se observă că liniile matricei A sunt coloane ale matricei A' şi reciproc, coloanele matricei A' sunt linii ale matricei A.

Exemplu

Transpusa matricei $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z})$ este matricea $A'=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$.

Egalitatea a două matrice

Ținând seama de definiția matricei de tip (m, n) şi de egalitatea a două funcții, dăm următoarea

Definiție

Spunem că două matrice $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B=\left(b_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt egale şi scriem $A=B$, dacă $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i\in\{1,2,\dots,m\}$ şi $\forall j\in\{1,2,\dots,n\}$.

Exemplu

Matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&10^{-1}\\-1&3^2&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Q})$ şi $B=\begin{pmatrix}3^0&|-2|&0{,}1\\-1&9&\sqrt{0}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Q})$ sunt egale, deoarece ambele sunt de tipul (2, 3), iar $1=3^0$, $2=|-2|$; $10^{-1}=0{,}1$; $-1=-1$; $3^2=9$; $0=\sqrt{0}$.

Exercițiu rezolvat

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\3&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{N})$ şi $B=\begin{pmatrix}1&x&5\\y&1&z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{N})$.

Determinăm $x,y,z\in\mathbb{N}$ pentru ca $A=B$.

Avem: $x=2$, $y=3$ şi $z=0$.

1.2. Operații cu matrice

Adunarea a două matrice

O intreprindere care își vinde produsele P_1, P_2 și P_3 la două magazine M_1 și M_2, organizează în zilele A și B, sondaje privind nivelul vânzărilor celor trei produse la .cele două magazine. Nivelul vânzărilor din ziua A este reprezentat în tabelul de tip matriceal

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}, \end{array}$$

iar cel al vânzărilor din ziua B este reprezentat în tabelul matriceal

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ B= & \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}. \end{array}$$

Nivelul vânzărilor celor trei produse ale intreprinderii, la cele două magazine în zilele A și B este:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7+5 & 3+4 \\ 2+1 & 1+3 \\ 5+3 & 4+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 3 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Definiție

Fie date matricele $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ***și*** $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Se numește suma matricelor A și B, matricea $C=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, ***unde*** $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $\forall i\in\{1,2,\dots,m\}$, $\forall j\in\{1,2,\dots,n\}$.

Notăm $C=A+B$.

Exemplu

Suma matricelor $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $B=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este matricea $C=$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+m & b+n \\ c+p & d+q \end{pmatrix}$$

Proprietățile adunării matricelor

Ținând seama de proprietățile adunării pe mulțimea numerelor complexe se obține:

a) Adunarea matricelor este asociativă.

Oricare ar fi matricele $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *și* $C=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $(A+B)+C=A+(B+C)$.