

Niculae Ghiciu

MATEMATICĂ M5

pentru clasa a XII-a

I ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE
1. MATRICE

1.1. Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice	3
Cazuri particulare de matrice. Diagonalele unei matrice pătratice	5
Transpusa unei matrice Egalitatea a două matrice	6
1.2. Operații cu matrice	7
Adunarea a două matrice. Proprietățile adunării matricelor	7
Înmulțirea unei matrice cu un scalar. Matrice opuse. Proprietățile înmulțirii matricelor cu scalari	9
Înmulțirea matricelor. Proprietățile înmulțirii matricelor	10
Puterea a n -a a unei matrice pătratice, $n \in \mathbb{N}^*$	13
Exerciții propuse	15

2. DETERMINANȚI

2.1. Exerciții pregătitoare	19
2.2. Determinanți de ordinul 2, calculul determinantului de ordinul 2	19
2.3. Determinanți de ordinul 3	21
Calculul determinantului de ordinul 3. Regula lui Sarrus. Regula triunghiului	22
2.4. Proprietățile determinantelor	25
2.5. Dezvoltarea unui determinant după o linie sau după o coloană	30
Exerciții propuse	33
2.6. Matrice inversabile din $\mathcal{M}_{n,n=2,3}$	36
Exerciții propuse	38
2.7. Aplicații	40
Ecuațiile dreptei determinate de două puncte date. Ecuația dreptei determinată de două puncte date, sub formă de determinant	40
Exerciții propuse	41
Aria unui triunghi	42
Exerciții propuse	43
Coliniaritatea a trei puncte din plan	44
Exerciții propuse	45

3. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

3.1. Ecuație liniară cu necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_n	47
3.2. Sisteme de ecuații liniare	47
3.3. Metode de rezolvarea a sistemelor liniare	48
Rezolvarea sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute. Regula lui Cramer	48
Rezolvarea sistemelor de trei ecuații liniare cu trei necunoscute. Regula lui Cramer	51
3.4. Rangul unei matrice. Minor principal. Determinant caracteristic. Rangul matricei \bar{A}	53
Exerciții propuse	56
3.5. Compatibilitatea sistemelor de trei ecuații liniare cu trei necunoscute	56
Exerciții propuse	59
3.6. Sisteme de ecuații liniare cu numărul ecuațiilor diferit de numărul necunoscutelor. Condiții necesare și suficiente de compatibilitate. Teorema Kronecker Kapelli. Teorema Rouché	60
Sisteme de ecuații cu numărul ecuațiilor mai mare decât numărul necunoscutelor	62

Sisteme de ecuații cu numărul ecuațiilor mai mic decât numărul necunoscutelor	63
Exerciții propuse	64
3.7. Sisteme de ecuații liniare omogene	65
Exerciții propuse	67
3.8. Ecuații matriceale	68
Exerciții propuse	70
3.9. Metoda eliminării necunoscuteelor (metoda lui Gauss)	71
Exerciții propuse	75

II STRUCTURI ALGEBRICE

1. OPERAȚII CU NUMERE, MATRICE, MULTIMI ȘI FUNCȚII	77
1.1. Scurtă recapitulare prin exerciții	77
2. LEGI DE COMPOZIȚIE. PARTE STABILĂ. TABLA UNEI OPERAȚII (LEGI DE COMPOZIȚIE INTERNE)	78
2.1. Legi de compozиție	78
2.2. Parte stabilă	79
2.3. Tabla unei operații (legi de compozиție interne)	80
Exerciții propuse	80
2.4. Proprietățile legilor de compozиție. Structuri algebrice	81
Asociativitatea	81
Exerciții propuse	82
Comutativitatea	83
Exerciții propuse	84
Elementul neutru. Monoid	85
Exerciții propuse	86
Elemente simetrizabile	87
Exerciții propuse	89
Grup	90
Exerciții propuse	93
Inel	94
Exerciții propuse	97
Corp	98
Exerciții propuse	101
III RECAPITULARE FINALĂ PRIN EXERCIȚII ȘI PROBLEME	102
Răspunsuri	106

1. MATRICE

1.1. Tabel de tip matriceal. Matrice, multimi de matrice

Citirea ușoară a unor informații numerice a condus la înregistrarea acestora în tabele. Unele dintre aceste tabele, numite matrice, sunt folosite la studiul compatibilității și la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare.

Pentru a susține această afirmație, începem prin prezentarea unor probleme ale căror informații numerice se prezintă prin tabele matriceale respectiv, prin matrice.

1) La trei librării L_1 , L_2 și L_3 , un manual școlar M se vinde respectiv, cu prețurile 12 u.m., 12,50 u.m. și 13 u.m. (u.m. = unități monetare), un caiet studențesc S se vinde respectiv, cu prețurile 8 u.m., 7 u.m. și 8,50 u.m., iar un creion C se vinde respectiv, cu prețurile 6 u.m., 5,50 u.m. și 5 u.m.

Pentru a avea o imagine mai clară asupra prețurilor celor trei obiecte de la cele trei librării, un elev le așează într-un tabel cu trei linii și trei coloane de tipul:

Librăria \ Obiectul	L_1	L_2	L_3
M	12	12,50	13
S	8	7	8,50
C	6	5,50	5

sau într-un tabel de trei linii și trei coloane de tipul:

$$\begin{matrix}
 L_1 & L_2 & L_3 \\
 M & \begin{pmatrix} 12 & 12,50 & 13 \end{pmatrix} \\
 S & \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8,50 \end{pmatrix} \\
 C & \begin{pmatrix} 6 & 5,50 & 5 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

numit **tabel de tip matriceal** cu 3 linii și 3 coloane sau simplu, **matrice**.

2) La o întreprindere se realizează două produse P_1 și P_2 prin folosirea a trei repere R_1 , R_2 , R_3 astfel:

- pentru produsul P_1 se folosesc 3 repere R_1 , 1 reper R_2 și 4 repere R_3 ;
- pentru produsul P_2 se folosesc 2 repere R_1 , 3 repere R_2 și 1 reper R_3 .

Prețurile de fabricație (p.f.) ale reperelor R_1 , R_2 și R_3 sunt respectiv de 10 u.m., 8 u.m. și 6 u.m., iar costurile de transport (c.t.) sunt respectiv, de 4 u.m., 5 u.m. și 3 u.m.

Pentru o imagine de ansamblu asupra necesarului celor trei repere și respectiv, asupra costurilor acestora, la nivelul întreprinderii se formează tabele de tip matriceal cu trei linii și două coloane sau cu două linii și trei coloane.

$$\begin{matrix}
 P_1 & P_2 \\
 R_1 & \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 R_2 & \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 R_3 & \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}
 \end{matrix}
 \text{ sau }
 \begin{matrix}
 P_1 & P_2 \\
 R_1 & \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} \\
 R_2 & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
 R_3 & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

respectiv

$$\begin{matrix}
 P_1 & P_2 \\
 R_1 & \begin{pmatrix} p.f. & c.t. \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \\
 R_2 & \begin{pmatrix} 8 & 5 \end{pmatrix} \\
 R_3 & \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}
 \end{matrix}
 \text{ sau }
 \begin{matrix}
 P_1 & P_2 \\
 R_1 & \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} \\
 R_2 & \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \end{pmatrix} \\
 R_3 & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

3) La o întreprindere se realizează produsele P_1 , P_2 și P_3 prin folosirea reperelor R_1 , R_2 , R_3 și R_4 astfel:

- pentru produsul P_1 se folosesc a_{11} repere R_1 , a_{12} repere R_2 , a_{13} repere R_3 și a_{14} repere R_4 ;
- pentru produsul P_2 se folosesc a_{21} repere R_1 , a_{22} repere R_2 , a_{23} repere R_3 și a_{24} repere R_4 ;
- pentru produsul P_3 se folosesc a_{31} repere R_1 , a_{32} repere R_2 , a_{33} repere R_3 și a_{34} repere R_4 ;

Un tabel de tip matriceal al consumului de repere pentru produsele întreprinderii este tabelul matriceal cu 3 linii și 4 coloane:

Respect pentru domeniile și cărțile

$R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} P_1 \quad P_2 = (a_{ij})_{\substack{i=1,3 \\ j=1,4}}$$

produsul P_i , $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$.



Remarcă

Prin realizarea tabelului de tip matriceal A , cu 3 linii și 4 coloane, s-a dat o funcție

$$A : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \rightarrow a_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}.$$

În general, fiind date două mulțimi $M = \{1, 2, \dots, m\}$ și $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, prin realizarea unui

tabel de tip matriceal cu m linii și n coloane, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, unde $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$,

$j = \overline{1, n}$, se dă o funcție $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$, $(i, j) \rightarrow a_{ij}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.



Definiția matricei de tipul (m, n)

Fie $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} .

Numim matrice de tipul (m, n) cu elemente din mulțimea \mathbb{C} , orice funcție

$$A : M \times N \rightarrow \mathbb{C}, (i, j) \rightarrow a_{ij}, i \in M, j \in N.$$

Notăm matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ sau $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Numerele a_{ij} , $i \in M$, $j \in N$ se numesc elementele matricei A .

Mulțimea matricelor cu m linii și n coloane, cu elemente din \mathbb{C} , formează mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente din \mathbb{C} și se notează $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Pe baza celor spuse mai sus, scriem că matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.



Observații:

1) De obicei, matricele se notează cu litere mari ale alfabetului latin, cu sau fără indici: $A, B,$

$C, \dots, L, \dots, X, \dots, A_1, A_2, \dots$, iar elementele matricelor se notează cu litere mici ale alfabetului latin, cu sau fără indici: $a, b, c, \dots, x, \dots, a_{11}, a_{12}, \dots$.

2) Cum $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, elementele matricelor pot fi considerate din oricare din aceste mulțimi. Deci, putem avea matrice din mulțimile de matrice: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sau $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Cazuri particulare de matrice

Respect pentru oamenii de știință și învățământ

1) O matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1,n}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, cu n linii și n coloane, se numește **matrice pătratică de ordinul n** .

cu elemente în \mathbb{C} . Scriem, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) O matrice $C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (a_{i1})_{i=1,m}$, $a_{i1} \in \mathbb{C}$, cu m linii și o coloană, se numește **matrice coloană**, cu elemente din \mathbb{C} . Spunem că matricea C este de tip $(m, 1)$ și scriem $C \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$.

3) O matrice $L = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) = (L_{1j})_{j=1,n}$, $a_{1j} \in \mathbb{C}$, cu o linie și n coloane, se numește **matrice linie**, cu elemente din \mathbb{C} . Spunem că matricea L este de tip $(1, n)$ și scriem $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.

4) O matrice formată dintr-un singur element a , număr complex, are forma (a) , $a \in \mathbb{C}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{Z}), B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z}), D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & -\frac{2}{3} \\ -2 & 0,5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{Q}), L = \left(2, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Q}).$$

5) Matricea $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se numește **matricea nulă** de tipul (m, n) .

6) Matricea $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește **matricea unitate** de ordinul n .

Diagonalele unei matrice pătratice

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ se numește

diagonala principală a matricei A , iar sistemul ordonat de elemente $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{nn}$ se numește **diagonala secundară a matricei A** .

Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ are diagonala principală $(1, 1, 1)$ și diagonala secundară $(2, 1, 2)$.

Transpusa unei matrice

Fie o matrice de tipul (m, n) , $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1, m \\ j=1, n}}$.

Matricea de tipul (n, m) , $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji})_{\substack{j=1, n \\ i=1, m}}$ se numește **transpusa matricei A** .

Se observă că liniile matricei A sunt coloane ale matricei A' și reciproc, coloanele matricei A' sunt liniile ale matricei A .

Exemplu

Transpusa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{Z})$ este matricea $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Z})$.

Egalitatea a două matrice

Ținând seama de definiția matricei de tip (m, n) și de egalitatea a două funcții, dăm următoarea



Definiție

Spunem că două matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt egale și scriem $A = B$, dacă $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ și $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemplu

Matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10^{-1} \\ -1 & 3^2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Q})$ și $B = \begin{pmatrix} 3^0 & |-2| & 0,1 \\ -1 & 9 & \sqrt{0} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Q})$ sunt egale, deoarece

ambele sunt de tipul $(2, 3)$, iar $1 = 3^0$, $2 = |-2|$; $10^{-1} = 0,1$; $-1 = -1$; $3^2 = 9$; $0 = \sqrt{0}$.

Exercițiu rezolvat

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{N})$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ y & 1 & z \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{N})$.

Determinăm $x, y, z \in \mathbb{N}$ pentru ca $A = B$.

Aveam: $x = 2$, $y = 3$ și $z = 0$.

Adunarea a două matrice

O întreprindere care își vinde produsele P_1 , P_2 și P_3 la două magazine M_1 și M_2 , organizează în zilele A și B , sondaje privind nivelul vânzărilor celor trei produse la cele două magazine. Nivelul vânzărilor din ziua A este reprezentat în tabelul de tip matriceal

$$A = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} P_1 P_2 P_3,$$

iar cel al vânzărilor din ziua B este reprezentat în tabelul matriceal

$$B = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} P_1 P_2 P_3.$$

Nivelul vânzărilor celor trei produse ale întreprinderii, la cele două magazine în zilele A și B este:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+5 & 3+4 \\ 2+1 & 1+3 \\ 5+3 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 3 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$



Definiție

Fie date matricele $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Se numește suma matricelor A și B , matricea $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,

$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Notăm $C = A + B$.

Exemplu

$$\begin{aligned} \text{Suma matricelor } A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{este matricea } C = \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+m & b+n \\ c+p & d+q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proprietățile adunării matricelor

Înănd seama de proprietățile adunării pe mulțimea numerelor complexe se obține:

a) Adunarea matricelor este asociativă.

Oricare ar fi matricele $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $(A+B)+C = A+(B+C)$.